

$$x_R(t) = \Re[x(t)] = \cos(2\pi f_0 t) \quad (1.4.11)$$

$$x_I(t) = \Im[x(t)] = \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.4.12)$$

Come ogni numero complesso, anche il nostro segnale può essere rappresentato, anziché attraverso la propria parte reale e parte immaginaria come in (1.4.11)-(1.4.12), anche mediante la propria *ampiezza* e *fase*:

$$x(t) = x_R(t) + j \cdot x_I(t) = A_x(t)e^{j\theta_x(t)} \quad (1.4.13)$$

dove³ $A_x(t) \triangleq \sqrt{x_R^2(t) + x_I^2(t)}$ e $\theta_x(t) = \text{atan2}(x_I(t)/x_R(t))$. Per il nostro esponenziale complesso, abbiamo che $A_x(t) \equiv 1$ per qualunque valore del tempo t :

$$|x(t)|^2 = x_R^2(t) + x_I^2(t) = \cos^2(2\pi f_0 t) + \sin^2(2\pi f_0 t) = 1 \quad (1.4.14)$$

mentre, chiaramente $\theta_x(t) = 2\pi f_0 t$.

La rilevanza applicativa di questo segnale è legata a una ben nota metodologia analitica adottata nell'ingegneria elettrica, e cioè al calcolo fasoriale (si veda il **Capitolo 2**). Se adottiamo questa prospettiva, l'esponenziale complesso $x(t)$ può essere interpretato come un *vettore rotante* che ruota nel piano complesso alla velocità $f_0 = 1/T_0$ cicli/s (Hz). Questa rappresentazione è illustrata nella **Figura 1.13**, in cui sono anche riportate le proiezioni sull'asse reale e sull'asse immaginario prodotte dalla rotazione di $x(t)$ al variare di t , e cioè rispettivamente $x_R(t)$ e $x_I(t)$.

L'esponenziale complesso è evidentemente un segnale periodico di periodo T_0 , in quanto, come è possibile intuire dalla **Figura 1.13**, il vettore rotante si ritrova nello stesso punto del piano complesso dopo ogni periodo T_0 . L'energia di $x(t)$ è pertanto illimitata, mentre è possibile calcolarne la potenza media utilizzando ancora una volta la (E1.3.1); otteniamo così che

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |e^{j2\pi t/T_0}|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} 1 \cdot dt = 1 \quad (1.4.15)$$

1.4.5 Impulso rettangolare

Così come risulta utile introdurre il gradino unitario per modellare un evento che “appare” improvvisamente al tempo $t = 0$ e poi resta indefinitamente costante, altrettanto utile è introdurre una funzione che modella la comparsa ma anche la *scomparsa* dell'evento. Questo segnale è il cosiddetto *impulso rettangolare*, definito come

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1, & |t| < T/2 \\ 1/2, & |t| = T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \quad (1.4.16)$$

e rappresentato nella **Figura 1.14**. Come già accennato per il gradino unitario, il particolare valore 1/2 assunto dal segnale sui “fronti” di salita $t = -T/2$ e di discesa $t = T/2$ sarà giustificato in seguito.

³ La funzione atan2 qui utilizzata è la cosiddetta *arcotangente a 4 quadranti*, la quale vale: 1) $\text{atan}(x_I(t)/x_R(t))$ se $x_R(t) \geq 0$; 2) $\text{atan}(x_I(t)/x_R(t)) + \pi$ se $x_R(t) < 0$ e $x_I(t) \geq 0$; 3) $\text{atan}(x_I(t)/x_R(t)) - \pi$ se $x_R(t) < 0$ e $x_I(t) < 0$.